磁場はBだけではうまく表せない

北野, 正雄

大学の物理教育 Vol. 21, No. 2, p. 73 (2015) 著者最終校

磁場は B だけではうまく表せない

北野正雄　京都大学大学院工学研究科

1 はじめに

原と広井[1] は高校物理や大学入試問題において, 磁場を表すのに 2 種類の場 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$ が並行して使われており, このことが教育上の混乱を引き起こしていると主張している. そして, 大学初年級向けの物理と同様に高校でも, $\boldsymbol{H}$ を使わずに, $\boldsymbol{B}$ だけで済ませることを提案している.

この主張の背景には, いわゆる電磁気における E-H 対応, E-B 対応という 2 つの流儀の衝突がある. 前者では磁気的な力を磁荷の間に働くものとし, 後者では電流の間に働くものとする点で異なっている. E-H 対応は, 電荷間に働く電気力とのアナロジーとして理解しやすいので, 従来よく用いられてきた. しかし, 磁荷は仮想的な概念にすぎず, マクスウェル方程式にも対応する項は存在しないので, 現在では, E-B 対応を採るのが一般的になっている. この場合, 磁性体は正負の磁荷対（磁気双極子）ではなく, 微小な環状電流の集まりとして理解される.

物理的に見て自然な E-B 対応が普及するのは望ましいことであるが, 一方で, $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ を対応させるだけにとどまらず, $\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{H}$ は原則使用しないという極端な考えが広まっている. 電場, 磁場はそれぞれ 1 つの場で表わされるべきだという固定観念は, 歴史的経緯 (古い単位系など) に由来するところが大きく, 有名な教科書においてさえ見受けられる. しかし, 電磁気学の体系では, 4 つの場 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$ はそれぞれが固有の物理的意味を担っている. 本稿では, 磁場に関して, $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{H}$ は相補的な機能を果たしており, 一方を排除すると, かえって記述が複雑になったり, 理解が困難になることを示す.

2 電磁場は 4 つの場で表わされる

電磁気学の基本式は, 4 つの場 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$ を用いて最も一般的な形で表される[2,3].

マクスウェル方程式の 2 つの式

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho, \quad \mathrm{curl}\,\boldsymbol{H} - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D} = \boldsymbol{J} \tag{1}$$

は, 電磁場とその源である電荷密度 ρ, 電流密度 $\boldsymbol{J}$ との関係を示している. ここに含まれる $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$ は "源場" (source field) と呼ばれる. 残りの 2 つの式

$$\mathrm{curl}\,\boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} = 0, \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0, \tag{2}$$

に含まれる $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ は, 体積あたりのローレンツ力

$$\boldsymbol{f} = \rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} \tag{3}$$

を与えるので, "力場" (force field) と呼ばれる.

2 組の場 $(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{H})$ と $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$ を関連づけるのが媒質の構成方程式

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{H} = \mu_0^{-1}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M}, \tag{4}$$

である. μ_0, $\varepsilon_0\,(= \mu_0^{-1}c_0^{-2})$ はそれぞれ真空の透磁率, 誘電率を表す. c_0 は真空中の光速である[4,5].

構成方程式 (4) によって, 4 つの場の間に条件を設定することで, 様々の電磁現象を扱うことが可能になる. 真空の場合は $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M} = 0$ と置くだけで, 式 (1)–(3) はそのままでよい. 媒質中では分極 $\boldsymbol{P}$, 磁化 $\boldsymbol{M}$ は $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ に依存するが, その依存性は多様である. $\boldsymbol{M} = \mu_0^{-1}\chi_{\mathrm{m}}\boldsymbol{B}$ のような単純な比例関係だけではなく, ヒステリシスや非線形, 電場と磁場の混合などがありうる. また線形であっても, (時間あるいは空間的) 非局所的依存である場合も多い. 例えば分

散性誘電体では, $\boldsymbol{P}(t) = \int_{-\infty}^{t} \varepsilon_0 \chi_{\mathrm{e}}(t-t')\boldsymbol{E}(t')\mathrm{d}t'$, あるいは, そのフーリエ変換 $\tilde{\boldsymbol{P}}_\omega = \varepsilon_0 \tilde{\chi}_{\mathrm{e}}(\omega)\tilde{\boldsymbol{E}}_\omega$ で表わされる. χ_{e}, $\tilde{\chi}_{\mathrm{e}}$ はそれぞれ誘電応答関数, 複素誘電感受率である.

3 真空でも 4 つの場は意味を持つ

文献 [1] には, 電流 I_1, I_2 の間に作用する磁気力は「磁場 $\boldsymbol{B}$」によって仲立ちされると書かれている (p. S36). この考え方は, 前節の構造化された基礎方程式群や単位（次元）に照らして考えると, 必ずしも適切とはいえない. 真空中の平行電流間の力の式 $F = \mu_0 I_1 I_2 l/(2\pi r)$ は, それぞれ, 式 (3), (4), (1) に対応して

$$F = (I_2 l)B, \quad B = \mu_0 H, \quad H = \frac{I_1}{2\pi r}, \tag{5}$$

と書き直すことができる. 最初の式は, 電流 I_2 の長さ l の部分が磁場 B から受けるローレンツ力を表し, B の単位が $\mathrm{N/(A\,m)}$ と表せることが分かる. 最後の式は, 電流 I_1 が作る磁場 H を与え, 両辺の単位は $\mathrm{A/m}$ である. この分解によって, H と B がそれぞれ "源場", "力場" の役割を果たしていることが認識される. 2 番目の構成方程式は 2 つの場の関係を与えている.

仮想的な磁荷間の力は, $F = q_{\mathrm{m1}} q_{\mathrm{m2}}/(4\pi\mu_0 r^2)$ と書かれるが, 同様に分解することができる:

$$F = q_{\mathrm{m2}} H, \quad H = \mu_0^{-1} B, \quad B = \frac{q_{\mathrm{m1}}}{4\pi r^2}. \tag{6}$$

最初の式は, 磁荷 q_{m2} が磁場 H から受ける力を表し, H の単位が $\mathrm{N/Wb}$ と表せることが分かる. 最後の式は, 磁荷 q_{m1} が作る磁場 B を与え, 単位は $\mathrm{Wb/m^2}$ である. 電流間の力の場合と比較すると, 今度は B が "源場" と H が "力場" となって, 役割が入れ替わっている. 電流の場合は B だけが, 磁荷の場合は H だけが力を媒介しているのではない.

文献 [1] が, 磁荷の単位を Wb とすることを疑問視しているように, 一般的に磁場に関する単位の扱いは硬直的である. 特に Wb, T という専用の単位が準備されていることがかえって柔軟性を奪っている. 単位に関する式変形には関係式 $\mathrm{Wb} = \mathrm{V\,s}$ を積極的に利用するとよい. 電磁誘導の関係「磁束の時間変化が起電力に等しい」から明らかであり, 電荷の関係式 $\mathrm{C} = \mathrm{A\,s}$ とも対応がよい. これをより, $\boldsymbol{H}$ の単位の 2 つの表現の等価性 $\mathrm{N/Wb} = \mathrm{(J/m)/(V\,s)} = \mathrm{A/m}$ が簡単に導出できる. $\mathrm{J} = \mathrm{W\,s} = \mathrm{A\,V\,s}$ を用いた. $\boldsymbol{B}$ の単位についても同様である. 単位の扱いに慣れれば, $\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}$ の単位が $\mathrm{(A/m)\times(V\,s/m^2)} = \mathrm{J/m^3}$ となりエネルギー密度に相当することは直ちに分かる. $\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{B}$ がエネルギー密度に関する共役量であることを示している. 磁場における $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$ は, 電気回路における電圧, 電流と類似の役割を担っていることが了解される.

4 $\boldsymbol{H}$ の物理的意義

真空中でも $\boldsymbol{H}_0 = \mu_0^{-1}\boldsymbol{B}$ を導入する意味はあるが, 磁性媒質が存在する場合 ($\boldsymbol{M} \neq 0$) には, さらに有用性が増す. $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 - \boldsymbol{M}$ と定義すれば, 媒質の状態に依らず, 保存則であるアンペールの法則 $\mathrm{curl}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$ が成り立つからである. このように定義された $\boldsymbol{H}$ を, 異質な量の合成であると軽視し, "補助場" と称するのは合理的でない. エネルギー保存則は異質な量の和を全エネルギーと定義することで普遍的に成り立っている. また, 正準運動量 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} + q\boldsymbol{A}$ は粒子の速度 $\boldsymbol{v}$ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ という異質の量の和であるが, 補助量といわれることはなく, $\boldsymbol{A} = 0$ の場合に使用が禁じられているわけでもない.

$\boldsymbol{H}$ は測定方法がないので, 物理的意味がないという意見がある. しかし, $\boldsymbol{H}$ の測定法は, W. トムソンによって考えられている [3]. 一般に磁性体中の磁場測定ではプローブを設置するために小さな空洞を開ける必要がある. 空洞形状が球の場合, その内部の磁束密度は, 磁化によるみかけの電流のために, $\boldsymbol{B}^{\circ} = \boldsymbol{B} - (2/3)\mu_0\boldsymbol{M}$ となる. 異質と思われる 2 種類の場が合成されている. 因子 2/3 は, 空洞形状が

偏長になれば 1 に, 扁平になれば 0 に近づく.

空洞形状が偏長の場合 (例えば, 細長い円筒) の内部磁束密度は $\boldsymbol{B}^{\mathrm{o}} = \boldsymbol{B} - \mu_0(\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$ となる. $\boldsymbol{u}$ は空洞長軸方向の単位ベクトルである. 軸に沿った磁場成分を測定するようにプローブを配置すると, 測定値は $B_u^{\mathrm{o}} = B_u - \mu_0 M_u = \mu_0 H_u$ となり, $\boldsymbol{H}$ の $\boldsymbol{u}$ 方向の成分 $H_u = \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{u}$ が得られる. 残り 2 成分も測定し, $\boldsymbol{H}$ が決定できる. 空洞を使って $\boldsymbol{B}$ を知りたい場合には, 空洞形状を扁平にすることで, 見かけの電流の影響を避ける必要がある.

電磁波において, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$ の役割は一層重要である. 媒質内では電磁場と物質の混成波（ポラリトンなど）が伝搬するので, $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ だけで記述することは殆ど不可能である. また、方程式の対称性 (電磁双対性) から、$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{H})$ と $(\boldsymbol{D},\boldsymbol{B})$ が自然な組み合わせになる. 波動は, 位相速度 $v_{\mathrm{p}} = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$, 波動インピーダンス $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon} = \tilde{E}/\tilde{H} = \tilde{B}/\tilde{D}$ で特徴づけられる. 前者は屈折において, 後者は反射において重要な働きをする.

5 磁荷, 磁極の正体

「磁荷」あるいは「磁極」は歴史的な発展過程で便宜的に導入された概念であり, マクスウェル方程式には含まれていない. しかし, 学習の初期段階において, 身近な永久磁石や磁針の働きを, 暫定的に「磁荷」を用いて説明せざるを得ないであろう. そして, いずれかの段階で「磁荷」は存在せず, 永久磁石もミクロな環状電流から構成されているということを示す必要がある.

マクスウェル方程式から「磁荷」が現れる仕組みを確認しておこう. 時間定常な磁場に対するマクスウェル方程式と構成方程式は

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0, \quad \boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}, \tag{7}$$

で与えられる. $\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}$ は自由電流密度である.

E-B 対応を念頭に, $\boldsymbol{B}$ を基準にして, $\boldsymbol{H}_0 = \mu_0^{-1}\boldsymbol{B}$ を導入すると, 式 (7) は

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{H}_0 = \boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} + \boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0 \tag{8}$$

となる. $\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} := \operatorname{curl}\boldsymbol{M}$ は磁化電流密度と呼ばれ, 自由電流密度 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}$ に加えて, 磁場に影響を及ぼしていると解釈できる. 軸方向に一様に磁化された有限長さの円柱では, 磁化電流は円筒側面を周回するように流れ, ソレノイドコイルと同じ磁場 $\boldsymbol{B}$ を発生しているように見える. 磁化 $\boldsymbol{M} = N\boldsymbol{m}$ は微小環状電流 $\boldsymbol{m}$ (単位: $\mathrm{A\,m^2}$) の数密度 N の集合と見なすことができる.

一方, E-H 対応を念頭に, $\boldsymbol{H}$ を基準に, $\boldsymbol{B}_0 = \mu_0\boldsymbol{H}$ を導入すると, 式 (7) は

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{B}_0 = \rho_{\mathrm{m}}, \tag{9}$$

となる. $\rho_{\mathrm{m}} := -\operatorname{div}(\mu_0\boldsymbol{M})$ は分極磁荷密度と呼ばれる. 分極磁荷は円柱の両端面に逆符号で現れ (N 極, S 極), 磁場 $\boldsymbol{H}$ を発生しているように見える. “磁化” $(\mu_0\boldsymbol{M}) = N\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}$ は磁気双極子 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}$ (単位: $\mathrm{Wb\,m}$) の集合として捉えられる.

これらの式変形の目的は, $\boldsymbol{M}$ の効果を磁化電流, または分極磁荷の形で明示することにある. 構成方程式が真空, またはそれに準ずるものになっているので, 場のようすが直感的に捉えられるという利点がある. しかし, 実際に方程式を解く場合には, $\boldsymbol{M}$ の効果が $\boldsymbol{H}$ に組み入れられた式 (7) を直接用いる方が便利である. 適切な境界条件の下で解けば, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$ が正しく得られる. 得られた解が与える $\boldsymbol{M}$ について, 式 (8), (9) のような見方, 解釈が可能であるということである.

6 幾何学からみた B, H

$\boldsymbol{H}$ の単位は A/m であり, 線積分 $\int_C \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ は単位 A で測られる量, すなわち電流に相当する. 一方, $\boldsymbol{B}$ の単位は $\mathrm{Wb/m^2}$ であり, 面積分 $\int_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ は単位 $\mathrm{Wb} = \mathrm{V\,s}$ で測られる量, すなわち磁束に相当する. このように, $\boldsymbol{H}$ は線積分, $\boldsymbol{B}$ は面積分に適

合する量である．形式的には $\boldsymbol{H}$ を面積分, $\boldsymbol{B}$ を線積分することも可能ではあるが, 物理的意味は明確ではない．ストークスの定理, ガウスの定理を考慮すると, curl は $\boldsymbol{H}$ に div は $\boldsymbol{B}$ に作用させるのが自然である．境界条件も, $\boldsymbol{B}$ の法線成分, $\boldsymbol{H}$ の接線成分のみが関係する．また, $\boldsymbol{H}$ は長さあたり, $\boldsymbol{B}$ は面積あたりの量であり, 長さのスケール変換に対して異なった振る舞いをする．例えば, 長さの単位を m から cm に変えると, $1\,\mathrm{A/m} = 10^{-2}\,\mathrm{A/cm}$, $1\,\mathrm{Wb/m^2} = 10^{-4}\,\mathrm{Wb/cm^2}$ のようになる．

微分形式 (反対称テンソル) の理論を用いると, 上の積分や微分における制約条件がより厳格なものであることが明らかになる．$\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$ は便宜的にベクトルで表わされているが, 実体はそれぞれ 1 階擬テンソル, 2 階反対称テンソルであり, 数学的, 幾何学的に全く異なったものである．詳しくは文献 [6–8] を参照されたい．

7 まとめ

電磁気学の体系を踏まえれば, 磁場は $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{H}$ の両方を用いて記述すべきである．一方, 高校段階で電磁気の全体像を教えることは不可能であり, 教育内容の取捨選択が必要なことから．$\boldsymbol{B}$ に力点を置く教え方も一つの選択だと思われる．しかし, 大学教育において, さらには電磁気学の体系上も, $\boldsymbol{H}$ を重視すべきではないとの主張があるとすれば, それは行き過ぎである．大学の物理においてしばしば見受けられる, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$ の軽視は, 電磁気学の体系性, 論理性を著しく損なうものであり, その正しい理解を妨げている．$\boldsymbol{H}$ 不要論は, 学習者への配慮の形式をとっているが, 実際には, 正当な根拠のない慣習や誤った理解に惑わされて, 教えにくい事項を教程から消し去ってしまう試みに思える [9]．高校物理でも, 安易に $\boldsymbol{H}$ を排除するのではなく, その意味をうまく伝える方法を模索するべきであろう．

参考文献および注

1) 原 康夫, 広井 禎, 大学の物理教育 **20** (2014) p. S34.

2) J.D. Jackson, Classical Electrodymanics, 3rd ed. (Wiley, 1998) p. 238.

3) J.A. Stratton, Electromagnetic Theory (McGraw-Hill, 1941) p. 1, p. 213.

4) 現在, SI において $c_0 = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$ と定められている．この数値は定義値であり, 不確かさはない．原子時計から得られる 1 s と, この定義を組み合わせて, 1 m の大きさを定めている．以前は, 1 m の大きさはクリプトン 86 原子からの光の波長, さらにはメートル原器を用いて定められていた．そこでは, c_0 の数値は測定によって求めるべきものであり, 不確かさを伴っていた．真空の透磁率も現時点では, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$ と数値が定義されている．力学的に定まる 1 N と組み合わせて, 1 A の大きさを定める役割をしている．この数値は過去に使われていた単位 (系) との連続性に配慮して定めたものに過ぎないのだが, 恣意的に見えるため, μ_0 の物理的意味が誤解されることが多い．計測技術の進歩に伴い, 将来アンペアの定義が変更されることは確実である．例えば, 1 C と素電荷 e の比を定義値として定めることが検討されている．そうなれば, μ_0 の数値は昔の c_0 のように, 測定によって求められることになる．詳しくは国際度量衡局 (BIPM) のサイトを参照されたい．
http://www.bipm.org/en/measurement-units/

5) 真空のインピーダンス $Z_0 := \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 376.7...\,\Omega$ を用いれば, 2 つの定数は $\varepsilon_0 = 1/(c_0 Z_0)$, $\mu_0 = Z_0/c_0$ と対称的に表せる．光速 c_0 は時間・空間に関連した定数であり, 電磁気にとどまらない, より普遍的な量である．したがって, Z_0 が電磁気に固有の唯一の定数である．

6) G. Weinreich, Geometrical Vectors (University of Chicago Press, 1998).

7) G.W Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler, Gravitation (Freeman, 1973) Chap. 4.

8) 北野正雄, マクスウェル方程式 (サイエンス社, 2009).

9) 文献 [1] は, 比例関係 $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ を示すと, 磁場 $\boldsymbol{B}$ の力線が閉曲線ではなく, N 極を始点, S 極を終点とする線と誤解されると懸念している (p. S35)．しかし, $\mu(\boldsymbol{r})$ が位置の関数であれば, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} \neq \mu\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{H}$ は当然である．また, p. S37 の $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ が成り立つのが媒質が一様で無限に広がっている場合のみ, というのは誤りである．この式は媒質の形状や大きさに依らず, 線形媒質内の各点において常に成り立つ．有限媒質の境界付近における磁化電流や分極磁荷は媒質内の $\boldsymbol{B}$ や $\boldsymbol{H}$ を変形させるが, それに応じて $\boldsymbol{M}$ が変化し, 最終的に各点で $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ が満たされるところで平衡する．文献 [1] の図 1 に描かれている $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{H}$ に対して $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ が成り立っていないのは, 磁石 ($\boldsymbol{M}$: 一定) が線形媒質ではないからである．

連絡先 Email: kitano@kuee.kyoto-u.ac.jp